孤立特異点の三種類の多重種数

石井, 志保子

代数幾何学シンポジウム記録
1988年度 pp.123-139

孤立特異点の三種類の多重種数

九大理 石井 志保子

完備代数多様体を多重種数 P_m の増大度 K で分類したように $n(\geq 2)$ 次元孤立特異点 (X, x) を何らかの多重種数の増大度で分類することを試みる。この多重種数として何をとるかが問題であるが ここでは Knöller, 渡辺の多重種数 $\gamma_m(X, x)$, $\delta_m(X, x)$ に加えて新たな多重種数 $d_m(X, x)$ を導入し これらを組上にのせる.

結論を述べると $\gamma_m(X, x)$ の増大度 K_γ は $-\infty$ か n のいずれかになる. 一方, $d_m(X, x)$ の増大度 K_d は $-\infty, 0, 1, \cdots, n-1$ のいずれかになる. また $\delta_m(X, x)$ の増大度 K_δ は d_m と δ_m の関係 (Th 4.2) により $-\infty, 0, 1, \cdots, n-2, n$ のいずれかになることがわかる ($n-1$ がないことに注意)。この δ_m と d_m との関係により $K_\delta(X, x) = K_d(X, x) \leq n-2$ か 又は $K_\delta(X, x) = K_d(X, x) + 1 = n$ のいずれかが成立することがわかるので K_δ による分類と K_d による分類は一致する.

とくに特異点 (X, x) が $(n-1)$ 次元 non-singular variety E 上の cone になっている場合、$\kappa_d(X, x)$ は $\kappa(E)$ と一致する。

ここで $n=2$ のとき、κ_γ による分類と κ_d による分類（κ_δ によるものと同値）をみてみよう

κ_d	κ_δ	κ_γ	特異点
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	有理二重点
		2	商特異点（i.e. $\mathbb{C}^2/G$: G 有限群）
0	0	Z	単純楕円型，カスプ型，又はそれらの有限群による商特異点で上の $\mathbb{C}^2/G$ にならないもの
1	Z	Z	その他すべての特異点

では、$n=3$ のときはどうであろうか？ 残念ながら上記の様な表はまだ完成していない。しかし $\mathbb{Q}$-Gorenstein（[I, 2]）や Gorenstein（[I, 1]）等の仮定のもとで $\kappa_d = \kappa_\delta = 0$ なる特異点のことがある程度わかってきている。また一般に $\mathbb{Q}$-Gorenstein で $\kappa_\gamma = -\infty$ なる特異点とは canonical singularity である。これらについては Reid，森氏らの研究が良く知られている。

この小稿を通して、基礎体は常に $\mathbb{C}$ とする。

§1. 準備.

<u>定義 1.1.</u> 実数列 $a=\{a_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ に対して、次のような 0以上の整数 k が存在するとき、"a_m は order k で増大する" といい、$a_m \sim m^k$ と表わす:

$$0<\limsup_{m\to\infty}\frac{a_m}{m^k}<\infty$$

(この k を a_m の増大度ともいう)

<u>注意 1.2.</u> 勝手な実数列 $\{a_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ に対しては、必ずしも増大度は存在しない。$a_m=\log m$ を考えてみれば良い。

<u>定義 1.3</u> (X, x): $n(\geq 2)$次元正規孤立特異点
$f:\tilde{X}\to X$ を良特異点解消 (i.e. 特異点解消であって、$E:=f^{-1}(x)_{red}$ が正規交叉因子になっている) とする。
$m\in\mathbb{N}$ に対して $\gamma_m(X,x)$, $\delta_m(X,x)$, $d_m(X,x)$ を次の様に定義する。

$$\gamma_m(X,x):=\dim_{\mathbb{C}}\frac{\Gamma(\tilde{X}-E,\mathcal{O}_{\tilde{X}}(mK_{\tilde{X}}))}{\Gamma(\tilde{X},\mathcal{O}_{\tilde{X}}(mK_{\tilde{X}}))} \qquad ([Kn])$$

$$\delta_m(X,x):=\dim_{\mathbb{C}}\frac{\Gamma(\tilde{X}-E,\mathcal{O}_{\tilde{X}}(mK_{\tilde{X}}))}{\Gamma(\tilde{X},\mathcal{O}_{\tilde{X}}(mK_{\tilde{X}}+(m-1)E))} \qquad ([W1])$$

$$d_m(X,x):=\dim_{\mathbb{C}}\frac{\Gamma(\tilde{X},\mathcal{O}_{\tilde{X}}(mK_{\tilde{X}}+mE))}{\Gamma(\tilde{X},\mathcal{O}_{\tilde{X}}(mK_{\tilde{X}}+(m-1)E))}$$

注意 1.4 これらはいずれも良特異点解消 f のとり方によらない。また Knöller、渡辺により
$$\limsup_{m\to\infty} \frac{\gamma_m(X,x)}{m^n} < \infty$$
が示されている。$\delta_m(X,x) \leq \hat{\delta}_m(X,x) \leq \gamma_m(X,x)$ に注意すれば $\delta_m, \hat{\delta}_m, \gamma_m$ の増大度はもし存在するならば高々 n であるということがわかる。

以後 n 次元孤立正規特異点 (X,x) の良特異点解消 $f: \tilde{X} \to X$ と $E = f^{-1}(x)_{red}$ を固定し $E = \sum_{i=1}^{s} E_i$ と既約分解する。

泊・渡辺による補題を準備しよう。

補題 1.5.([T-W]). $f: \tilde{X} \to X$ が点 x の maximal ideal m_x の blow up を通って分解すると仮定する。
$I := f_* \mathcal{O}_{\tilde{X}}(-\sum_{i=1}^{s} a_i E_i)$ $a_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ とおく。
すると f のみによって定まる $\beta > 0$ が存在して、任意の上記の I に対し $\dim \mathcal{O}_X/I \geq \beta (a_i)^n$ $(i = 1, 2, \cdots, s)$ が成り立つ。

命題1.6. ある整数 $r>0$ が存在して

$$\Gamma(\tilde{X}-E,\ \mathcal{O}_{\tilde{X}}(mK_{\tilde{X}})) = \Gamma(\tilde{X},\ \mathcal{O}(m(K_{\tilde{X}}+rE)))$$

が任意の m について成立する.

(∵) 補題1.5によって示される.

§2. γ_m の増大度.

定理2.1. 任意の n 次元正規孤立特異点 (X, x) について次のいずれかが成立する.

(i) $\gamma_m(X, x) = 0 \quad (\forall m \in \mathbb{N})$

(ii) $\gamma_m(X, x) \sim m^n$

[証明] (i) を否定した時に (ii) が成立することをいえば良い. これは $\displaystyle\limsup_{m\to\infty} \frac{\gamma_m(X,x)}{m^n} < \infty$ がわかっているので $\displaystyle 0 < \limsup_{m\to\infty} \frac{\gamma_m(X,x)}{m^n}$ を示せば十分である.
仮定により $\Gamma(\tilde{X}-E,\ \mathcal{O}(m_0 K_{\tilde{X}})) \supsetneqq \Gamma(\tilde{X},\ \mathcal{O}(m_0 K_{\tilde{X}}))$ なる $m_0>0$ が存在する. 左の元であって右の元になっていないもの ω をとる. $\varphi_m: \mathcal{O}_X \to \Gamma(\tilde{X}-E,\ \mathcal{O}(m m_0 K_{\tilde{X}}))$ を $\varphi_m(g) := f^*(g)\cdot\omega^m$ で定義する. $J^{(m)} := \varphi_m^{-1}(\Gamma(\tilde{X},\ \mathcal{O}(m m_0 K_{\tilde{X}})))$ とおくと $J^{(m)} = f_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}\left(\sum_{i=1}^{r} \min\{m\nu_{E_i}(\omega),\ 0\} E_i\right)$ とかける.

ω の定義により 少くとも1つの i に対し E_i の係数は $m\nu_{E_i}(\omega)$ なる負の値になる。そこで 補題 1.5 により $\dim \mathcal{O}_X/J^{(m)} \geq \beta(-m\nu_{E_i}(\omega))^n$ が任意の $m \in \mathbb{N}$ について成立する。したがって $\dim \mathcal{O}_X/J^{(m)}$ は少くとも order n で増大する。一方 φ_m により inclusion:

$$\mathcal{O}_X/J^{(m)} \subset \Gamma(\tilde{X}-E, \mathcal{O}(mm_0K_{\tilde{X}}))\big/\Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(mm_0K_{\tilde{X}}))$$

が得られる。よって この左辺の次元 すなわち $\delta_{mm_0}(X, x)$ は 少くとも order n で増大する。

§3. d_m の増大度

<u>命題 3.1</u> n 次元正規孤立特異点 (X, x) に対して $d_m(X, x) \neq 0$ なる $m \in \mathbb{N}$ が存在すると仮定する。すると $0 \leq k \leq n-1$, $m_0 > 0$ なる整数 k, m_0 が存在して さらに 実数 $\alpha, \beta > 0$ が存在し

$$\alpha m^k \leq d_{mm_0}(X, x) \leq \beta m^k \quad ({}^\forall m \in \mathbb{N})$$

が成立する。

<u>補題 3.2.</u> Z を $n(\geq 2)$ 次元非特異 quasi-projective variety, E を Z 上の既約な非特異 projective variety と

する．また D を Z 上の因子とするとき 制限写像 $\Gamma(Z, \mathcal{O}_Z(mD)) \to \Gamma(E, \mathcal{O}_E(mD))$ の像を Λ_m と表わす．この Λ_m によって決まる sublinear system $|\Lambda_m| \subset |mD|_E|$ の定義する有理写像を Φ_m と表わしその像を W_m とする いま ある $m \in \mathbb{N}$ について $\Lambda_m \neq 0$ と仮定すると 正整数 m_0 と 正の実数 α, β が存在して

$$\alpha m^k \leq \dim \Lambda_{mm_0} \leq \beta \cdot m^k$$

が任意の $m \in \mathbb{N}$ について成立する．ただし $k = \max_{m \in \mathbb{N}} \dim W_m$

[証明] 方法は [U] の Theorem 8.1 と同様なので省略する．

[命題 3.1 の証明] X を特異点 (X, x) の affine 近傍とする．$f: \tilde{X} \to X$ を良特異点解消 $E = f^{-1}(x)_{red}$ とすると．$\tilde{X}$ は quasi-projective variety．Λ_m を 制限写像 $\Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(m(K_{\tilde{X}}+E))) \to \Gamma(E, \mathcal{O}_E(mK_E))$ の像，$\Lambda_m^{(i)}$ を制限写像 $\Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(m(K_{\tilde{X}}+E))) \to \Gamma(E_i, \mathcal{O}_{E_i}(m(K_{\tilde{X}}+E)))$ の像とする ここで E_i は E の既約成分である． すると 全射 $\Lambda_m \to \Lambda_m^{(i)}$ が任意の i について得られる．また 単射 $\Lambda_m \hookrightarrow \bigoplus_{i=1}^{r} \Lambda_m^{(i)}$ が得られる．命題の仮定とこの単射性により．ある $m \in \mathbb{N}$ と i に対して $\Lambda_m^{(i)} \neq 0$．この i に対して 補題 3.2 を用いれば 整数 k_i, e_i $(0 \leq k_i \leq n-1,$

$e_i > 0$) と正の数 α_i, β_i が存在して $\alpha_i m^{k_i} \leq \dim \Lambda^{(i)}_{me_i} \leq \beta_i m^{k_i}$ が任意の $m \in \mathbb{N}$ について成りたつ．このような k_i の最大値を与えるのが k_1 としよう．また これらの e_i の公約数をとることにより，e_i は共通の数 e でとれているとして良い．したがって $\alpha_1 m^{k_1} \leq \dim \Lambda^{(1)}_{me} \leq \dim \Lambda_{me} \leq \sum_{i=1}^{p} \dim \Lambda^{(i)}_{me}$ を得る．k_1 の最大性により $\beta > 0$ を適当に大きくとれば，右辺 $\leq \beta m^{k_1}$ となる．（命題 3.1 の証明終）．

<u>定理 3.3.</u> n 次元正規孤立特異点 (X, x) に対して $d_m(X, x) \neq 0$ なる $m \in \mathbb{N}$ が存在するとしよう．このとき $0 \leq k \leq n-1$ なる整数 k が存在して，$d_m(X, x) \sim m^k$ が成立する．

［証明］ 一般の数列 $\{a_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ については $\alpha m^k \leq a_{mm_0} \leq \beta m^k$ $(\forall m \in \mathbb{N})$ だからといって $a_m \sim m^k$ はいえないが，我々の場合は $\dim \Lambda^{(i)}_m \leq \dim \Lambda^{(i)}_{mm'}$ $(m, m' \in \mathbb{N})$ がいえるので定理の主張が従う．

§4. δ_m の増大度．

この節では d_m と δ_m の関連を明らかにする．これ

により、δ_m の増大度が定義されること、またその増大度のとり得る値もわかる。初めに、補題を準備する。証明は省略

<u>補題4.1.</u> n次元正規孤立特異点 (X, x) の良特異点解消 $f: \tilde{X} \to X$ が $\sqrt{I} = m_x$ となる様な $\mathcal{O}_X$-ideal I の blow up で得られているとする。もし $\delta_m(X, x) \gneqq d_m(X, x)$ なる $m \in \mathbb{N}$ が存在するならば、ある $m_0 \in \mathbb{N}$ に対し

$$\Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(m_0 K_{\tilde{X}} + (m_0 + 1)E)) \gneqq \Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(m_0 K_{\tilde{X}} + m_0 E))$$

が成りたつ。

<u>定理4.2.</u> n次元正規孤立特異点 (X, x) について、次は同値である:

(i) $d_m(X, x) \lneqq \delta_m(X, x)$ for some $m \in \mathbb{N}$

(ii) $\delta_m(X, x) \sim m^n$

(iii) $d_m(X, x) \sim m^{n-1}$

[証明] まず (i)⇔(ii) を示す。もし (ii) が成立していると、$d_m(X, x)$ の増大度は高々 $n-1$ なので、必ず $d_m(X, x) \lneqq \delta_m(X, x)$ となる m が存在する。((ii)⇒(i) OK) 逆に (i) を仮定すると、ある m_0 に対し $\Gamma(\tilde{X} - E, \mathcal{O}(m_0 K_{\tilde{X}})) \gneqq \Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(m_0 K_{\tilde{X}} + m_0 E))$ だから、左の元であって右の元ではないもの ω がとれる。

このωに対して、定理2.1の証明でやったと同様にφ_mを定義し、$J^{(m)} = \varphi_m^{-1}(\Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(mm_0K_{\tilde{X}}+(mm_0+1)E)))$ とおくと、$\dim \mathcal{O}_X/J^{(m)} \le \delta_{mm_0}(X, x)$ が得られる。ωのとり方と、補題1.5により、左辺は order n で増大するので $\delta_m(X, x)$ も order n で増大することがわかる。

(i)⇒(ii)の証明. 良特異点解消 $f: \tilde{X} \to X$ を次の様にとる: f は max ideal m_x の blow up を経由しまた f は $\sqrt{J} = m_x$ なる ideal J の blowing up である。
補題4.1により $\Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(m_0K_{\tilde{X}}+m_0E)) \subsetneq \Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(m_0K_{\tilde{X}}+(m_0+1)E))$ が成立するので右の元ではあるが左の元ではないωをとる。添字の順序を替えて $i=1,\cdots,t$ については $\nu_{E_i}(\omega) = -(m_0+1)$, $i=t+1,\cdots,s$ については $\nu_{E_i}(\omega) \ge -m_0$ とする。このとき $J^{(m)} = f_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}(-\sum_{i=1}^{t}(m+1)E_i - \sum_{i=t+1}^{s}E_i)$ とおく。$\varphi_m: \mathcal{O}_X \to \Gamma(\tilde{X}-E, \mathcal{O}(mm_0K_{\tilde{X}}))$ を $\varphi_m(g) = f^*(g)\cdot\omega^m$ で定義すると、このφ_mにより単射: $J^{(m-1)}/J^{(m)} \hookrightarrow \Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(mm_0K_{\tilde{X}}+E))/\Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(mm_0K_{\tilde{X}}+(mm_0-1)E))$ が得られる。補題1.5により $\dim \mathcal{O}_X/J^{(m)}$ は少くとも n の増大度をもつ。したがって $\dim J^{(m-1)}/J^{(m)}$ は少くとも $n-1$ の増大度をもつ。よって上記の単射の右辺の次元は少くとも $n-1$ の増大度をもつ。

(iii)⇒(i)の証明　(iii)の条件のもとで $d_m(X,x)=\delta_m(X,x)$ が
任意の $m\in\mathbb{N}$ について成立すると仮定して矛盾を出す.
制限写像 $\Gamma(\tilde{X},\mathcal{O}(m(K_{\tilde{X}}+E)))\longrightarrow\Gamma(E,\mathcal{O}_E(mK_E))$ の像を
Λ_m, 制限写像 $\Gamma(\tilde{X},\mathcal{O}(m(K_{\tilde{X}}+E)))\longrightarrow\Gamma(E_i,\mathcal{O}_{E_i}(m(K_{\tilde{X}}+E)))$
の像を $\Lambda_m^{(i)}$ と書く. 条件(iii)により $\dim\Lambda_m\sim m^{n-1}$
だから ある i について $\dim\Lambda_m^{(i)}\sim m^{n-1}$. このような
i を1としよう. 補題3.2により $\Phi_{\Lambda_m^{(1)}}:E_1\longrightarrow\mathbb{P}^L$ は
$m>>0$ に対して generically finite. 十分大きい m を
固定する. $\Sigma\subset E_1$ を, $\Phi_{\Lambda_m^{(1)}}$ が $E_1-\Sigma$ 上で finite
morphism になるような最小の閉集合とする.
さて我々はここで $K_{\tilde{X}}+E$ が quasi-projective variety
$\tilde{X}_0:=\tilde{X}-\{(\bigcup_{i\neq 1}E_i)\cup\Sigma\}$ 上 ample になることを示そう.
$\tilde{X}-E$ は quasi-affine variety だから, $K_{\tilde{X}}+E$
は $\tilde{X}-E$ の上では ample である. $\Phi:\tilde{X}-E\hookrightarrow\mathbb{P}^N$
を $\Phi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)=\mathcal{O}_{\tilde{X}-E}(mK_{\tilde{X}}+mE)$ となる locally closed
immersion とする. $\tilde{\Lambda}_m\subset\Gamma(\tilde{X}-E,\mathcal{O}(mK_{\tilde{X}}))=\Gamma(\tilde{X},\mathcal{O}(m(K_{\tilde{X}}+E)))$
を $\Phi^*(z_i)$ ($\{z_i\}_{i=0\cdots N}$ は $\mathbb{P}^N$ の coordinates) をすべて含み
制限写像 $\Gamma(\tilde{X},\mathcal{O}(m(K_{\tilde{X}}+E)))\longrightarrow\Gamma(E_1,\mathcal{O}_E(m(K_{\tilde{X}}+E)))$ によって
$\Lambda_m^{(1)}$ に全射になっているような有限次元 subspace とす
る. すると有理写像 $\Phi_{\tilde{\Lambda}_m}:\tilde{X}\longrightarrow\mathbb{P}^{N'}$ は $\tilde{X}_0$ 上で finite
morphism になる. したがって ample のひきもどし $\Phi_{\tilde{\Lambda}_m}^*(\mathcal{O}(1))$

$=\mathcal{O}(m(K+E))$ も $\tilde{X}_0$ 上で ample である.

さて, $\tilde{X}_0$ 上の ample divisor $K_{\tilde{X}}+E$ に対し, $M>0$ を十分大きくとれば $M(K_X+E)+E_1$ もやはり ample でかつ base point free になる. したがって次の包含関係を得る.

$$\Gamma(\tilde{X}_0, \mathcal{O}(MK_X+ME)) \subsetneqq \Gamma(\tilde{X}_0, \mathcal{O}(M(K_X+E)+E_1))$$

$$\begin{array}{ccc} \text{\rotatebox{90}{$\subseteq$}}\!\!\parallel & & \text{\rotatebox{90}{$\supseteq$}}\!\!\parallel \end{array}$$

しかし $\Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(M(K_{\tilde{X}}+E))) = \Gamma(\tilde{X}-E, \mathcal{O}(MK_{\tilde{X}}))$

(仮定)

であったので矛盾. したがって (i) が成立しなければならない. (定理4.2 の証明終)

系 4.3. n 次元正規孤立特異点 (X, x) に対し $\delta_m(X, x) \neq 0$ なる $m \in \mathbb{N}$ が存在しているとする. すると $\delta_m(X, x) \sim m^k$ (k は 0 と n の間の $n-1$ 以外の整数).

[証明] 定理4.2の同値な条件が成立するとするならば $\delta_m(X, x) \sim m^n$. 定理4.2の条件が成立しないときは, (i) の否定より, $\delta_m(X, x) = d_m(X, x)$ ($\forall m \in \mathbb{N}$)

ところで右辺は (iii) の否定により, $d_m(X, x) \sim m^k$

$k \leq n-2$.

§5 多重種数の増大度による特異点の分類

§2.3.4 により γ_m d_m. δ_m の増大度が定義できることがわかった.

<u>定義 5.1.</u> n 次元正規孤立特異点 (X, x) に対し.
$\delta_m(X, x)=0$ for every $m \in \mathbb{N}$ のとき. $\kappa_\delta(X, x)=-\infty$ と定義し. $\delta_m(X, x) \neq 0$ なる m が存在するときは.
$\kappa_\delta(X, x) :=$ $\delta_m(X, x)$ の増大度 と定義する. $\gamma_m(X, x)$ $d_m(X, x)$ についても同様に $\kappa_\gamma(X, x)$ $\kappa_d(X, x)$ を定義する.

以下に §2.3.4 の結果を $\kappa_\gamma, \kappa_\delta, \kappa_d$ を用いてまとめよう.

<u>系 5.2</u> n 次元正規孤立特異点 (X, x) に対して. 次が成立する:

(i) $\kappa_\gamma(X, x) = -\infty$ or n.

(ii) $\kappa_\delta(X, x)$ は $-\infty$ 又は $0, 1, 2, \cdots, n-2, n$ のいずれかである.

(iii) $\kappa_d(X, x)$ は $-\infty$ 又は $0, 1, 2, \cdots, n-2, n-1$ のいずれかである.

(iv) $\kappa_\delta(X, x) - \kappa_d(X, x) \leq n-2$ 又は $\kappa_\delta(X, x) - \kappa_d(X, x) + 1 = n$.

命題5.3 [T-W]. n次元 $\mathbb{Q}$-Gorenstein isolated singularity (X, x) に対して $\kappa_\delta(X, x)$ は $-\infty$ か 0 か又は n である.

定理5.4 2次元正規孤立特異点 (X, x) は §0 の表にあるように分類される.

[証明] $\kappa_\gamma(X, x) = -\infty$ なる2次元正規孤立特異点 (X, x) は有理二重点であることは次の様に示される: まず $\gamma_1(X, x) = 0$ より (X, x) は有理特異点である. したがって $\mathbb{Q}$-Gorenstein 特異点である. また $\gamma_m(X, x) = 0$ $(\forall m \in \mathbb{N})$ により canonical 特異点であることがわかる. 2次元の canonical 特異点は有理二重点のみであった.
よって $\kappa_\delta(X, x) = -\infty \Leftrightarrow (X, x)$ は商特異点 なる同値は [W1] に於て証明済. $\kappa_\delta(X, x) = 0$ なる特異点の特徴付けは [Is4] においてなされた. のこる特異点はみな $\kappa_\delta(X, x) = 2$ である(系5.2 (iv))

定理5.5. E を非特異な射影$(n-1)$-fold で $\mathcal{L}$ をその上の ample invertible sheaf とする. (X, x) を $\mathbb{V}(\mathcal{L})$ の zero section をつぶした特異点とすると. $\delta_m(X, x) =$

$P_m(E)$ が任意の $m \in \mathbb{N}$ について成り立つ.

[証明] $\tilde{X} = \mathbb{V}(\mathcal{L})$ とおくと

$$\Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(mK_{\tilde{X}} + mE)) = \bigoplus_{k \geq 0} \Gamma(E, \mathcal{O}_E(mK_E) \otimes \mathcal{L}^k)$$

$$\Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(mK_{\tilde{X}} + (m-1)E)) = \bigoplus_{k \geq 1} \Gamma(E, \mathcal{O}_E(mK_E) \otimes \mathcal{L}^k)$$

より $d_m(X, x) = \dim \Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}(mK_{\tilde{X}} + mE)) / \Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}(mK_{\tilde{X}} + (m-1)E))$

$$= \dim \Gamma(E, \mathcal{O}_E(mK_E))$$

$$= P_m(E)$$

文献

[EGA] Grothendieck, A. & Dieudonné, J.: Eléments de géométrie algébrique II. Publ. Math. IHES 8 (1961)

[Ii 1] Iitaka: On D-dimension of algebraic varieties J. Math. Soc. Japan, 23 (1971) 356–373.

[Ii 2] ——— : On logarithmic Kodaira dimension of algebraic varieties. Complex Analysis and Algebraic Geometry: A collection of papers dedicated to K. Kodaira. Iwanami-Cambridge 1977. 175–189.

[Is 1] Ishii, S.: On isolated Gorenstein singularities. Math. Ann. 270 (1985) 541–554.

[Is 2] ———— : Isolated Q-Gorenstein singularities of dimension three. Advanced Studies in Pure Math. 8 (1986) 165–198.

[Is 3] ———— : Small deformation of normal singularities. Math. Ann. 275 (1986) 139–148.

[Is 4] ———— : Two dimensional singularities with bounded plurigenera δ_m are Q-Gorenstein singularities. To appear in Proc. of Symp. of Singularities Iowa.

[Iz] Izumi, S.: A measure of integrity for local analytic algebras. Publ. RIMS, Kyoto Univ. 21 (1985) 719–735.

[K] Kawamata, Y.: The cone of curves of algebraic varieties, Ann. of Math., 119 (1984) 95–110.

[Kn] Knöller, F. W.: 2-dimensionale Singularitäten und Differentialformen. Math. Ann. 206 (1973) 205–213.

[L-T] Lejeune-Jalabert, M. & Teissier, B.: Clôture intégrale des idéaux et équisingularité. École Polytechnique 1974.

[S] Sakai, F.: Kodaira dimension of complements of divisors. Complex analysis and algebraic geometry: A collection of papers dedicated to K. Kodaira. Iwanami-Cambridge 1977, 239-257.

[T-W] Tomari & Watanabe: Not-log-canonical Gorenstein isolated singularities are of general type in the sense of L^2-plurigenera of singularities. Preprint.

[U] Ueno, K.: Classification theory of algebraic varieties and compact complex spaces. Lecture Note in Math. 439. Springer-Verlag 1975.

[W1] Watanabe, K.: On plurigenera of normal isolated singularities I. Math Ann. 250 (1980) 65-94.

[W2] ________ : On plurigenera of normal isolated singularities II. Advanced Studies in Pure Math. 8 Complex Analytic Singularities (1986) 671-685.